Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 3

Abgabe: Montag, den 06. Mai 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 3.1 (*4 Punkte*)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, zweier K-Vektorräume V_1 und V_2 sowie zweier Unterräume U_1 von V_1 bzw. U_2 von V_2, ob $V_1/U_1 \cong V_2/U_2$. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(x,0)^t \mid x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0,x)^t \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(b) $K = \mathbb{Q}$, $V_1 = \mathbb{Q}^4$, $V_2 = \mathbb{Q}^2$, $U_1 = \{(a, -a+b, b, 2a+b)^t \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $U_2 = \{0\}$.

(c) K beliebig, $n \in \mathbb{N}$, $V_1 = V_2 = K^{n\times n}$,

$$U_1 = \{A = (A_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in V_1 \mid \forall i, j = 1, \ldots, n : A_{ij} = A_{ji}\},$$
$$U_2 = \{A = (A_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in V_2 \mid \forall i, j = 1, \ldots, n : A_{ij} = A_{n+1-i,j}\}.$$

Aufgabe 3.2 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Erinnerung: Für ein lineares Funktional $f \in V^*$ bezeichnen wir mit $f|_W : W \to K, f|_W(x) \coloneqq f(x)$ die *Restringierung* auf W. Betrachten Sie die Abbildung $\rho : V^* \to W^*, \rho(f) \coloneqq f|_W$.

(a) Zeigen Sie, dass $\rho \in L(V^*, W^*)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $\ker(\rho)$ und R_ρ.

(c) Geben Sie einen Isomorphismus $V^*/\ker(\rho) \simeq R_\rho$ an.

Aufgabe 3.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ zwei Unterräume. Zeigen Sie:

$$U/(U \cap W) \simeq (U + W)/W.$$

Aufgabe 3.4 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper.

(a) Sei $x \coloneqq (0, 1, 0, \ldots) \in K^{\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x^k = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \ldots).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation in $K^{\mathbb{N}_0}$ distributiv ist und dass für alle $c \in K$ und $f, g \in K^{\mathbb{N}_0}$ gilt: $c(fg) = (cf)g$.

Betrachten Sie nun die Polynomalgebra $K[x]$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[x]$ mit $f + g \neq 0$ gilt:

$$\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}.$$

(d) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[x]$ mit $\deg(f) \neq \deg(g)$ gilt:

$$\deg(f + g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}.$$